

Devoir surveillé 1 S1

Veillez à faire une rédaction soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte.

EXERCICE 1 8PTS

 On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = x^5 + x^3 - 1$

1. Donner le tableau de variations de la fonction h
2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
3. En utilisant La méthode de dichotomie, Donner un encadrement de α d'amplitude **0.25**.
4. Vérifier que : $\alpha = \sqrt[5]{1 - \alpha^3}$ et que : $\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \alpha^2}}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\frac{x-1}{h(x)} < 0$

EXERCICE 2 12PTS

 Soit f la fonction définie par: $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Montrer que f est définie sur : $D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
4. Montrer que f est continue sur $[1; +\infty[$.
5. Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpreter le résultat obtenu.
6. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{2x(x^2-2)}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}+1)}$ pour tout $x \in]1; +\infty[$
(b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
7. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.
8. Tracer la courbe (C_f) .
9. Soit g la restriction de f sur $[\sqrt{2}; +\infty[$
 - (a) Montrer que g admet une réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer.
 - (b) montrer que $\forall x \in [\sqrt{2}; +\infty[; \quad g(x) = (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2$
 - (c) Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1} .
 - (d) En déduire $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .
 - (e) Calculer $(g^{-1})'(4 - 2\sqrt{3})$

EXERCICE 3 2PTS

 On considère la fonction numérique F définie par:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{x+3} - 4}{a}, & \text{si } x \geq -1 \\ a, & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner la valeur de a pour que F soit continue en 1 . (on donne : $t-1 = (\sqrt[3]{t}-1)(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t} + 1)$)

Bon courage